

Тема 3. Элементы теории игр.

Лекция. Основные понятия теории игр. Матричные игры.

§1. Общая постановка задачи.

Определение 1. Ситуация называется *конфликтной*, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоречивы.

Определение 2. Теория, занимающаяся принятием решений в конфликтной ситуации, называется «*Теорией игр*». Задача теории игр состоит в выборе такой линии поведения игрока, отклонение от которой может уменьшить выигрыш.

Определение 3. Предполагается, что имеет место игра, если:

1. Имеется несколько конфликтных сторон (лиц), каждая из которых принимает некоторое решение (продавец-покупатель, банк-клиент, поставщик-потребитель и т.д.).
2. Решение определяется набором правил.
3. Каждой из сторон известны возможные конечные состояния игры (выигрыш, проигрыш, ничья).
4. Всем игрокам известны платежи, которые обычно задаются матрицей.

$$\|a_{ij}\|, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix}$$

Определение 4. Допустимые действия каждого из игроков, направленные на достижение цели, называются *правилами игры*.

Определение 5. Количественная оценка результата игры называется *платежом*.

Определение 6. Игра называется *парной*, если в ней участвует две стороны или два игрока.

Определение 7. Парная игра называется *игра с нулевой суммой*, если сумма платежей равна нулю (выигрыш 1-го игрока равен проигрышу 2-го).

Определение 8. Однозначное описание выбора игрока в каждой из возможных ситуаций, при котором он должен сделать очередной ход называется *стратегией*.

Определение 9. Каждая фиксированная стратегия, которую может выбрать игрок, называется *чистой стратегией*.

Определение 10. Стратегия игрока называется *оптимальной*, если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный выигрыш.

Пусть имеется два игрока А и В, причем у первого игрока А имеется m стратегий: A_1, A_2, \dots, A_m , а у второго игрока В имеется n стратегий B_1, B_2, \dots, B_n . Игрок А может выбрать i -ю стратегию, а игрок В - j -ю стратегию. При этом первый игрок выигрывает a_{ij} , а второй проигрывает эту же величину. Из чисел a_{ij} составим матрицу **A**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\| \quad (\text{платежная матрица игры}).$$

Строки этой матрицы являются соответствующими стратегиями первого игрока, а столбцы - стратегиями второго игрока. Эти стратегии и являются **чистыми стратегиями**.

Пример: Пусть игра задана платежной матрицей:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Представим эту игру в виде таблицы:

Стратегия игрока А	Стратегия игрока В		
	B_1	B_2	B_3
A_1	10	4	11
A_2	7	6	8

Если игрок А выбирает стратегию A_1 , то он получает выигрыш в размере 10, 4, или 11 д.е. в зависимости от выбора стратегии игроком В. Если игрок А выбирает стратегию A_2 , он может получить выигрыш 7, 6, или 8 д.е. в зависимости от выбора стратегии игроком В. Второй игрок В при выборе стратегии B_1 может проиграть 10 или 7 д.е. в зависимости от выбора стратегии игроком А. При выборе стратегий B_2 и B_3 он может проиграть 4 или 6 и 11 или 8 д.е. в зависимости от выбора стратегии игроком А.

Определение 11. Игру, определяемую матрицей, содержащей m -строк и n -столбцов, называют **конечной игрой**.

§2. Решение задач теории игр в чистых стратегиях.

Определение 1. Число \underline{V} , равное максимуму из минимальных значений a_{ij} , называется **нижней ценой игры** (максимин) - вычисляется по строкам.

Определение 2. Число \overline{V} , равное минимуму из максимальных значений a_{ij} , называется **верхней ценой игры** (минимакс) - рассчитывается по столбцам.

Определение 3. Если $\underline{V} = \overline{V} = V$, то это - **цена игры**.

Определение 4. Если нижняя цена игры равна верхней, то игра называется седловой или **ситуацией равновесия**.

Седловая точка является минимальным элементом соответствующей строки и максимальным элементом соответствующего столбца.

Седловая точка однозначно определяет оптимальные стратегии игроков. В данном случае считается, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, т.к. это приведет к ухудшению ситуации для обоих.

Игра с седловой точкой разрешима в чистых стратегиях, если:

1. Оптимальные стратегии игроков определяются координатами седловой точки.
2. Цена игры равна значению a_{ij} седловой точки.

Замечание: От платежной матрицы вида $A = \|a_{ij}\|$ можно перейти к стратегически эквивалентной матрице $\|a_{ij} + k\|$, т.е. стратегии игроков остаются без изменения, а цена игры увеличивается на k единиц.

Задача. Найти оптимальные стратегии и цену игры, заданную платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю цену игры:

$$\underline{V} = \max \min a_{ij}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 5 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} \quad \alpha_{\max} = 5$$

Найдем верхнюю цену игры:

$$\bar{V} = \min \max a_{ij}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 10 \\ \beta_2 = 10 \\ \beta_3 = 5 \\ \beta_4 = 14 \\ \beta_5 = 12 \end{cases} \quad \beta_{\min} = 5$$

$$a_{23} = 5 \quad \underline{V} = \bar{V} = V \quad V = 5$$

Вывод: игра, определенная матрицей A имеет седловую точку с координатами (2; 3), следовательно, она разрешима в чистых стратегиях. Если первый игрок будет придерживаться чистой 2-й стратегии, то обеспечит себе выигрыш не менее 5 д.е. Второй игрок, придерживаясь 3-й чистой стратегии, проиграет не более 5 д.е. Обе стратегии являются оптимальными. Отклонение от 2-й стратегии первым игроком ведет к уменьшению его

выигрыша и увеличению проигрыша для второго игрока, следовательно, отклонение от чистых стратегий не может быть выгодно обоим игрокам.

§3. Решение задач теории игр в смешанных стратегиях.

Если игра не имеет седловой точки, то у игроков нет единственной надежной стратегии. В этом случае используют смешанные стратегии (случайный выбор чистых стратегий с определенными вероятностями).

Определение 1. **Смешанной стратегией игрока А** называют множество $X(x_1, x_2, \dots, x_m)$, применяемых этим игроком в ходе игры чистых стратегий $(A_1; A_2; \dots; A_m)$ с вероятностями или частотами $(X_1; X_2; \dots; X_m)$, причем сумма всех вероятностей равна 1.

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Определение 2. **Смешанной стратегией игрока В** называют множество $Y(y_1; y_2; \dots; y_n)$, применяемых этим игроком в ходе игры чистых стратегий $(B_1; B_2; \dots; B_n)$ с вероятностями или частотами $(Y_1; Y_2; \dots; Y_n)$.

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

Задача первого игрока состоит в выборе такой стратегии X^* , чтобы при отсутствии информации о выборе стратегии другим игроком, максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока - выбрать такую стратегию Y^* , чтобы при отсутствии информации о выборе стратегии первым игроком, минимизировать свой проигрыш.

Рассмотрим решение задачи в смешанных стратегиях при отсутствии седловой точки (платежная матрица размерности 2×2).

B_j		B_1	B_2	α_{\max}
A_i	Y_j	y_1	y_2	
	X_i			
A_1	x_1	a_{11}	a_{12}	
A_2	x_2	a_{21}	a_{22}	
β_{\min}				

Составим систему уравнений для каждой переменной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = V \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Пример: Предприятие планирует выпустить изделия А и В. Спрос на эти изделия не определен, но можно предположить, что спрос примет одно из двух состояний: первое или второе. В зависимости от этих состояний, прибыль предприятия различна и определяется матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждого из изделий, при котором предприятию гарантируется средняя прибыль при любом состоянии спроса.

1. Проверим наличие седловой точки:

B_j		B_1	B_2	α_{\max}
A_i		y_1	y_2	
	X_i			
A_1	x_1	2	5	2
A_2	x_2	6	4	4
β_{\min}		6	5	

Так как $\underline{V} = 4$, а $\bar{V} = 5 \Rightarrow \underline{V} \neq \bar{V}$, то игра не имеет седловой точки. Тогда решаем задачу в смешанных стратегиях.

2. Составим системы уравнений:

$$\text{для игрока А: } X(x_1; x_2) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = V \\ 5x_1 + 4x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{для игрока В: } Y(y_1; y_2) \begin{cases} 2y_1 + 5y_2 = V \\ 6y_1 + 4y_2 = V \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = V \\ 5x_1 + 4x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = V \\ 5x_1 + 4x_2 = V \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \cdot 3; \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_2 = 3 \end{cases}; x_2 = \frac{3}{5}; x_1 = \frac{2}{5}$$

$$X\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right); V = \frac{22}{5}$$

$$2) \begin{cases} 2y_1 + 5y_2 = V \\ 6y_1 + 4y_2 = V \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} -4y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}; -5y_1 = -1 \quad y_1 = \frac{1}{5}; y_2 = \frac{4}{5}$$

$$Y\left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right); V = \frac{22}{5} = 4,4 \text{ y. d. e.}$$

Вывод: при производстве изделия B должно использоваться 20% возможных ходов первой стратегии и 80% второй стратегии, тогда средний проигрыш составит 4,4 д. е. Для получения среднего выигрыша, а значит и средней прибыли, при изготовлении изделия A надо использовать 40% первой стратегии и 60% второй стратегии.

Для проверки правильности решения задачи в смешанных стратегиях используют **функцию игры**.

$$M(x; y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

$$\begin{aligned} M(x; y) &= 2 \cdot x_1 \cdot y_2 + 5 \cdot x_1 \cdot y_2 + 6 \cdot x_2 \cdot y_1 + 4 \cdot x_2 \cdot y_2 = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \\ &= \frac{4 + 40 + 18 + 48}{25} = \frac{110}{25} = 4,4 \end{aligned}$$

§4. Графический метод решения задач теории игр.

Если платежная матрица имеет размерность 2×2 , то задачу можно решить графически. Пусть матрица имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

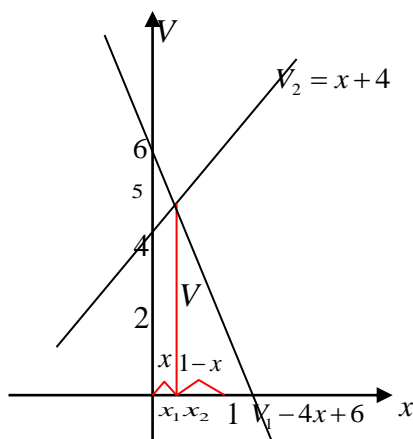
Для игрока A : $V = V_j(x)$ - ожидаемый средний выигрыш первого игрока, применяющего первую стратегию с вероятностью x , а вторую стратегию с вероятностью $(1 - x)$ и при условии, что второй игрок отвечает чистой j -й стратегией.

При $j=1$ $V = V_1(x) = 2 \cdot x + 6 \cdot (1-x)$ $V_1 = -4x + 6$

x	0	1
V_1	6	2

При $j=2$ $V = V_2(x) = 5 \cdot x + 4 \cdot (1-x)$ $V_2 = x + 4$

x	0	1
V_2	4	5



Чтобы найти цену игры V и смешанные стратегии 1-го игрока, решим систему

уравнений:
$$\begin{cases} V = -4x + 6 \\ V = x + 4 \end{cases}$$

$X = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$; $V = \frac{22}{5} = 4,4$ у.е. - гарантированный средний выигрыш 1-го игрока.

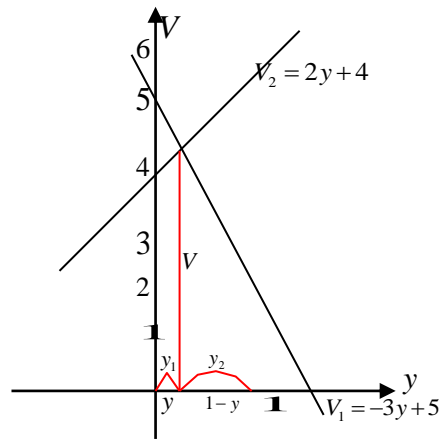
Для игрока B : $V = V_i(y)$ - ожидаемый средний проигрыш для второго игрока, применяющего 1-ю стратегию с вероятностью y , а 2-ю стратегию с вероятностью $(1-y)$ и при условии, что 1-й игрок отвечает чистой i -й стратегией.

При $i=1$ $V = V_1(y) = 2y + 5 \cdot (1-y)$ $V_1 = -3y + 5$

y	0	1
V_1	5	2

При $i=2$ $V = V_2(y) = 6y + 4 \cdot (1-y)$ $V_2 = 2y + 4$

y	0	1
V_2	4	6



Чтобы найти цену игры и смешанные стратегии 2-го игрока, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} V = -3y + 5 \\ V = 2y + 4 \end{cases} \quad \underline{\underline{-5y + 1 = 0}}$$

$$y_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{5} + 4 = \frac{22}{5} = 4,4 \text{ y.e.} - \text{средний проигрыш 2-го игрока.}$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5} \right)}}$$

§5. Сведение задачи теории игр к задачам линейного программирования.

Теорема. Для того, чтобы число V было ценой игры, а $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ были оптимальными стратегиями игроков A и B соответственно, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} X_i^* \geq V - \text{(гарантированный выигрыш).}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j^* \leq V - \text{(гарантированный проигрыш).}$$

Пусть дана матрица: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

Исходя из матрицы A , первый игрок имеет « m » стратегий, а второй игрок - « n » стратегий.

Для первого игрока мы имеем:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} X_i^* \geq V, \text{ т.е. } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq V \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq V \end{cases}$$

Обе части неравенств этой системы разделим на V :

$$\begin{cases} a_{11} \frac{x_1}{V} + a_{21} \frac{x_2}{V} + \dots + a_{m1} \frac{x_m}{V} \geq 1 \\ a_{12} \frac{x_1}{V} + a_{22} \frac{x_2}{V} + \dots + a_{m2} \frac{x_m}{V} \geq 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n} \frac{x_1}{V} + a_{2n} \frac{x_2}{V} + \dots + a_{mn} \frac{x_m}{V} \geq 1 \end{cases}$$

Эти дробные величины обозначим через t : $\frac{x_1}{V} = t_1 ; \frac{x_2}{V} = t_2 ; \dots ; \frac{x_m}{V} = t_m$.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

Следовательно, $t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} + \dots + \frac{x_m}{V} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{V} = \frac{1}{V}$.

Таким образом, вместо задачи теории игр, мы получили задачу линейного программирования для игрока A , где $\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i \geq 1$ - система ограничений, а

$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m \Rightarrow \min$ - целевая функция.

Так как $\frac{x_1}{V} = t_1 ; \frac{x_2}{V} = t_2 ; \dots ; \frac{x_m}{V} = t_m$, то функция $Z = f(t) = \frac{1}{V}$. Отсюда: $V = \frac{1}{f(t)}$.

Для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq V \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq V \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств системы на V и введем обозначения

$$\frac{y_1}{V} = h_1 ; \frac{y_2}{V} = h_2 ; \dots ; \frac{y_n}{V} = h_n . \text{ Получим:}$$

$$\begin{cases} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n \leq 1 \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \dots + a_{2n}h_n \leq 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + \dots + a_{mn}h_n \leq 1 \end{cases} .$$

Мы получили задачу линейного программирования для 2-го игрока, где $\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j \leq 1$ -

система ограничений, а $Z = f(h) \rightarrow \max$ - целевая функция.

А так как $\frac{y_j}{V} = h_j \Rightarrow f(h) = \frac{1}{V}$, то $V = \frac{1}{f(h)}$

Эти задачи являются двойственными задачами линейного программирования. Решая одну из них, мы получаем решение другой задачи. За основу лучше брать задачу для 2-го игрока. При составлении симплекс - таблиц следует помнить, что базисным переменным 2-й задачи соответствуют свободные переменные 1-й задачи, а базисным переменным 1-й задачи соответствуют свободные переменные 2-й задачи.

Пример: $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Для 1-го игрока	Для 2-го игрока
$\begin{cases} 2t_1 + 6t_2 \geq 1 \\ 5t_1 + 4t_2 \geq 1 \end{cases}$ $f(t) = t_1 + t_2 \rightarrow \min$ <p>Решается методом искусственного базиса.</p>	$\begin{cases} 2h_1 + 5h_2 \leq 1 \\ 6h_1 + 4h_2 \leq 1 \end{cases}$ $f(h) = h_1 + h_2 \rightarrow \max$ <p>Решается симплекс-методом.</p>

Контрольные вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается условие существования седловой точки в игре.
2. Поясните, в чем состоит природа столкновения в экономике.
3. Поясните построение платежной матрицы.